A RELAÇÃO MATEMÁTICA E MÚSICA

Adriano Luís Simonato (Faculdades Integradas FAFIBE)
Maria Palmira Minholi Dias (Faculdade de Ciências e Tecnologia de Birigüi/SP)

Resumo: Este trabalho procura estudar a relação entre a matemática e a música.

Palavras-chave: matemática; música; história da música.

1. Introdução

Acordes exatos e uma sonoridade perfeita. Quando uma pessoa depara-se com este tipo de situação não percebe a relação existente entre a matemática e a música. Mas, ao contrário do que muitos pensam, a matemática exerce sim um papel fundamental como instrumento base da música, seja na divisão rítmica ou sonora.

Todos os povos da Antiguidade tiveram os sons organizados em escalas, fórmulas e formas sonoras de realizar música. Os chineses desenvolveram as escalas pentatônicas, por volta de 2500 a.C, resultante da superposição de quintas (intervalos de cinco notas). Os gregos desenvolveram tetracordes, depois escalas heptatônicas – escalas com sete sons. Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Eratóstenes, desenvolveram diferentes escalas com algumas semelhanças. Os árabes desenvolveram escalas com 17 sons e os hindus com 22 sons.

A matemática mostrou-se indispensável para a evolução da música em vários aspectos: na construção de sistemas musicais que determinam os sons que ouvimos, na fundamentação teórica da análise e composição musical, nos aspectos relacionados à acústica, e mais recentemente na música digital, entre outros.

2. Pitágoras e o experimento do monocórdio

Segundo a lenda, Pitágoras (572-497) ao passar por uma oficina, ouviu o som de cinco martelos batendo numa bigorna. Admirado com o som agradável, e pensado inicialmente que a qualidade do som era proveniente da força das mãos, ele teria trocado os martelos, mas cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter tirado um que era desagradável, pesou os outros e constatou que o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis, de uma unidade de peso desconhecida.

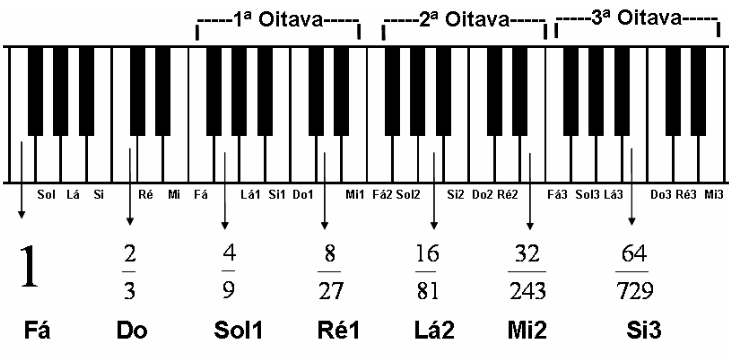
Estas razões matemáticas deram origem ao instrumento chamado monocórdio (mono=um, córdio=corda), possivelmente inventado por Pitágoras, que tinha em sua composição uma caixa de madeira com apenas uma corda, que quando pressionanda e tocada em determinados pontos, produzia sons de alturas (grave/agudo) diferentes. Isto fez com que os pitagóricos descobrissem que a altura de uma nota musical dependia do comprimento da corda que a produz.

Em seus experimentos Pitágoras observou que pressionando a corda num ponto situado à metade do comprimento da mesma e tocando-a a seguir, esta produzia um som reconhecido como sendo o mesmo som da corda solta, porém mais agudo, o que musicalmente, chamamos de oitava. Da mesma forma, exercendo a pressão a $\frac{2}{3}$, este novo som possuía certa relação com o som inicial, a corda solta, e este novo som é conhecido por quinta, e a pressão exercida a $\frac{3}{4}$, conhecemos por uma quarta. A partir de tal experiência, estes intervalos passaram a ser denominados por consonâncias pitagóricas.

A partir do experimento de Pitágoras, foi criado um sistema musical através das relações entre os números inteiros.

Os pitagóricos observaram que notas diferenciadas por intervalos de oitava apresentavam certa semelhança, podendo ser definida como uma classe de equivalência, onde duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo existente entre elas for um número inteiro de oitavas, podendo reduzir distintas oitavas a apenas uma, possuindo assim notas equivalentes em todas as outras oitavas e na oitava de origem (Abdounur, 2003, p.09).

O próximo passo estaria então em dividir esta oitava em sons que determinassem o alfabeto sonoro. E isto foi possível pela simplicidade nas razões de quintas e oitavas, possibilitando aos pitagóricos a construção de uma escala com sete notas, através de sucessivas divisões por quintas, como ilustra a figura abaixo:



Assim, está formada então a seqüência fá, do, sol, ré, lá, mi, si, constituída por quintas puras. Porém, estas notas estão em oitavas diferentes. Para ficar na ordem do-ré-mi-fá-sol-lá-si precisamos transpor numa única oitava. Iniciando pela nota DO, por exemplo, atribuímos a ela o comprimento 1. $\frac{2}{3}$ de Do corresponde a uma quinta ascendente de Do, (Do-ré-mi-fá-SOL), resultando portanto no Sol. $\frac{2}{3}$ de Sol, (SOL-lá-si-do$_1$-RÉ$_1$) corresponde ao Ré$_1$, ou seja, $\left(\frac{2}{3} de \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\right)$, estando este Ré$_1$ uma oitava acima do Ré$_0$, o que significa que seu comprimento foi dividido ao meio. Para reescrevê-lo após o Do$_0$, precisamos então dobrar o comprimento dele, $\left(\frac{4}{9} \times 2 = \frac{8}{9}\right)$. $\frac{2}{3}$ de Ré$_0$, (Ré$_0$-mi$_0$-fá$_0$-sol$_0$-LÁ$_0$) corresponde ao Lá$_0$, ou seja, $\left(\frac{2}{3} de \frac{8}{9} = \frac{16}{27}\right)$. $\frac{2}{3}$ de Lá$_0$, (Lá$_0$-si$_0$-do$_1$-ré$_1$-Mi$_1$) corresponde ao Mi$_1$, ou seja, $\left(\frac{2}{3} de \frac{16}{27} = \frac{32}{81}\right)$. Transpondo este Mi$_1$

para a oitava inicial Mi_0, teremos, portanto o comprimento $\frac{64}{81}.\ \frac{2}{3}$ de Mi_0, (Mi_0-$fá_0$-sol_0-$lá_0$-Si_0) corresponde ao Si_0, ou seja, $\left(\frac{2}{3} de \frac{64}{81} = \frac{128}{243}\right)$. E, para o fá, uma quinta descendente, ou uma quarta ascendente, $\frac{3}{4}$. Temos, portanto, a primeira escala musical, com as seguintes proporções:

	Do	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Do1**
Razão a partir de Do	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Razão intervalar resultante	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{128}{243}$	

Estas notas Do, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si formam a chamada escala diatônica de sete notas. Calculando o intervalo entre estas notas, encontraremos apenas dois valores: $\frac{8}{9}$, o tom diatônico pitagórico e $\frac{128}{243}$, o semitom diatônico pitagórico.

Continuando com a divisão de quintas após o Si_3, obtemos os outros sons que correspondem às notas acidentadas, $Fá\#_3$, $Do\#_4$, $Sol\#_4$, $Ré\#_5$, $Lá\#_5$, $Mi\#_6$ ($Fá_6$), $Si\#_6$ (Do_7). Assim, o intervalo da oitava fica dividido em doze partes (doze aplicações de quintas, que transpostas a oitava inicial, resulta em uma escala cromática formada por semitons).

Mas algo deu errado. Ao transpor o $Fá\#_3$ na oitava inicial, $\left(\frac{64}{729}\times 2\times 2\times 2\right)$, iremos obter a razão de comprimento para $Fá\#_0 = \frac{512}{729}$. E, o intervalo entre Sol_0 $\left(\frac{2}{3}\right)$ e um semitom abaixo, o $Fá\#_0$ $\left(\frac{512}{729}\right)$, nos dará um comprimento de $\frac{243}{256}$ para o semitom, medida igual ao semitom visto anteriormente. Porém, o intervalo entre $Fá\#_0$ $\left(\frac{512}{729}\right)$ e um semitom abaixo, o $Fá_0$ $\left(\frac{3}{4}\right)$, é de $\left(\frac{512}{729} \div \frac{3}{4} = \frac{2048}{2187}\right)$, ou seja, obtém-se uma outra razão para o semitom, denominado semitom cromático pitagórico, pouco maior que o semitom diatônico pitagórico. A diferença entre ambos semitons é a chamada de Coma Pitagórica.

Em outras palavras, qualquer que seja o número de sucessivas quintas, o som resultante nunca poderá ser obtido por sucessivas oitavas aplicadas a este som inicial. Em símbolos: $\left(\frac{2}{3}\right)^m \neq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall m, n \in N$.

Se, partindo do Do_0, subirmos doze quintas, e em seguida descermos sete oitavas, chegaremos num Si#, que é um pouco mais alto (agudo) do que o Do inicial. Este mesmo fenômeno ocorrerá com outros sons na escala pitagórica, os chamados sons enarmônicos. Além do desajuste entre quintas e oitavas, outro inconveniente que o

Sistema Pitagórico mostrou foi a impossibilidade da transcrição musical, ou seja, não era possível escrever escalas simétricas somente com intervalos naturais. Quanto maior harmonia sonora, ocorria menor simetria – como no princípio da incerteza, de Heisenberg.

Começaria o grande desafio da época: encontrar uma solução para que as escalas se ajustassem de tal forma que a cada nova escala as notas possuíssem relações de equivalência, sonora e simétrica.

3. A evolução da divisão sonora

Arquitas de Tarento (430-360 a.C.) foi um dos primeiros a caracterizar o fenômeno sonoro como resultado de pulsações de ar que produziam sons mais agudos à medida que se tornavam mais rápidas. Desse modo, prenunciava a relação de freqüência com a altura musical, explicada séculos mais tarde.

Durante a Idade Média até o início do Renascimento, observa-se na música ocidental mudanças que partem de uma concepção exclusivamente melódica – utilizando elementos simples – rumo a um caráter principalmente harmônico. (Bennett, 1982, p.13; Abdounur, 2003, p.21).

Por volta do século XI o pedagogo e teórico musical Guido D'Arezzo (955-1050 d.C.), exerceu papel decisivo na constituição de nossa teoria musical. Foi ele quem adotou uma pauta de cinco linhas e definiu as claves de fá e dó para registrar a altura dos sons. Além disso, Guido d'Arezzo deu nome às notas, tirando as sílabas iniciais de um hino a São João Batista; o qual era aplicado no canto eclesiástico:

HINO DE SÃO JOÃO BATISTA	
Ut queant laxis	Para que possam
REsonare fibris	ressoar as
MIra gestorum	maravilhas de teus feitos
FAmuli tuorum	com largos cantos
SOLve polluti	apaga os erros
LAbii reatum	dos lábios manchados
Sancte **I**oannes.	Ó São João.

De difícil entonação, o UT foi substituído posteriormente pelo Do.

As idéias pitagóricas prevaleceram até meados do século XII. Com o aparecimento da polifonia, as terças e sextas ganham a qualificação de consonância. Após a observação de que estes intervalos, não eram consonantes quando produzidos em razões pitagóricas, o compositor italiano Gioseffo Zarlino (1517-1590) formou a idéia do conjunto dos primeiros seis números inteiros, número sonoro ou número harmônico. Foi responsável pela criação de métodos para a divisão do braço de um instrumento de cordas em 12 semitons, baseado em médias geométricas.

O sistema de Zarlino incluiu o 5 como fator primo. Assim, construía-se a gama diatônica de acordo com as proporções diretamente derivadas, conscientemente ou não, na Série Harmônica. A terça maior $\frac{4}{5}$, a terça menor $\frac{5}{6}$, a sexta menor $\frac{5}{1\times2\times4}=\frac{5}{8}$, e a sexta menor $\frac{6}{1\times2\times5}=\frac{3}{5}$. Tendo Do como referência, a gama de Zarlino resulta em:

Do	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Do
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

No sistema de Zarlino a composição da quinta, uma consonância, com a terça, que também é uma consonância, resulta numa sétima com caráter bastante dissonante. Logo este sistema não resolve matematicamente a relação entre consonâncias - discussão esta iniciada com Pitágoras.

Em 1636, Marin Mersenne (1588-1648) matemático, filósofo e músico teórico, em sua obra Harmonie Universelle, propõe a divisão da oitava em 12 partes, desiguais e iguais, obtendo neste último o monocórdio harmônico. Músicos e estudiosos contestaram estas divisões na época, mas isto permitiria a criação de uma escala onde todos os intervalos seriam iguais. Resolvia assim o problema da mudança de tonalidade sem a necessidade de reajustar a afinação. A coma pitagórica desaparecia, mas houve resistência em aceitar tal divisão.

4. O Temperamento

A escala temperada possui como característica fundamental a relação matemática entre as freqüências de notas de um mesmo intervalo ser sempre igual, ou seja, a proporção entre as freqüências de duas notas distantes uma da outra - de um semitom - é sempre a mesma, não importando quais duas notas sejam. Do ponto de vista matemático, o problema consistia em encontrar um fator f correspondente ao intervalo de semitom que, após multiplicar 12 vezes uma freqüência f_0 correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava referente à freqüência 2

Se chamarmos de *i* o intervalo entre cada semitom temperado, um intervalo de quinta (7 semitons) é i^7, um intervalo de quarta (5 semitons) é i^5, um intervalo de segunda maior (2 semitons) é i^2, e assim por diante. O intervalo de oitava (12 semitons), dado por i^{12} tem a relação de 2:1, portanto:

$$i = 2^{\frac{1}{12}} = 1.059463094$$

Esse é o valor do intervalo de um semitom temperado. Similarmente pode-se calcular qualquer outro intervalo da escala temperada usando-se a expressão $i^n = 2^{\frac{n}{12}}$, onde *n* é o número de semitons contido no intervalo. Considerando a nota Do com freqüência 1, obtemos para as outras notas da gama temperada:

Nota	**Sistema Temperado**	**Razão intervalar**	**Números de semitons**	**Intervalo**
Do	$2^{\frac{0}{12}} = 1$	1	0	Uníssono
Do# = Ré*b*	$2^{\frac{1}{12}}$	**1,059** 463094	1	Segunda Menor
Ré	$2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}$	**1,122** 462048	2	Segunda Maior
Ré# = Mi*b*	$2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}$	**1,189** 207115	3	Terça Menor
Mi	$2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$	**1,259** 92105	4	Terça Maior

Fá	$2^{\frac{5}{12}}$	**1,334** 839854	5	Quarta Justa
Fá# = Sol$b$	$2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}$	**1,414** 213562	6	Quinta Diminuta
Sol	$2^{\frac{7}{12}}$	**1,498** 307077	7	Quinta Justa
Sol# = Láb	$2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}}$	**1,587** 401052	8	Sexta Menor
Lá	$2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}}$	**1,681** 792831	9	Sexta Maior
Lá# = Sib	$2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}}$	**1,781** 797436	10	Sétima Menor
Si	$2^{\frac{11}{12}}$	**1,887** 748625	11	Sétima Maior
Do	$2^{\frac{12}{12}} = 2$	2	12	Oitava

Os valores de freqüência da seqüência de notas de uma oitava formam uma progressão geométrica, cuja razão é igual a $2^{\frac{n}{12}}$. Essa progressão é usada como base na construção de todos os instrumentos de cordas.

O Sistema Temperado solucionava o problema da consonância, porém, só foi aceito mais de cem anos depois, quando Johann Sebastian Bach, compositor do século XVIII, escreveu uma série de 24 prelúdios e fugas cobrindo as 24 tonalidades maiores e menores, chamada de *O Cravo Bem-Temperado*, ilustrando a coloração que há em cada tonalidade, devido às diferenças dos intervalos dos semitons temperados em relação a seus correspondentes não temperados. Este certamente foi o primeiro trabalho que se tem registro que explora todas as tonalidades.

Além da construção sonora, a matemática também está presente na construção dos instrumentos de cordas, na divisão rítmica musical, na harmonia musical – onde os acordes nada mais são do que "o som dos vetores" - e pode também auxiliar no ensino da matemática.

5. Referências Bibliográficas

"A matemática e a música". Disponível em http://www.esec-garcia-orta.rcts.pt/Matematica%20e%20a%20musica.doc. Acesso em 23 out. 2004.

ABDOUNUR, Oscar João. "Matemática e música": o pensamento analógico na construção de significados. 3 ed. São Paulo: Escrituras, 2003.

"A música da antigüidade". Disponível em http://www.tvebrasil.com.br/agrandemusica/historia_musica/musica_antiga.htm. Acesso em 14 jan. 2005.

BENNETT, R. "Uma breve história da música. Rio de Janeiro": J.Zahar Editor, 1982 (livro do abdounur)

JULIANI, Juliana Pimentel. "Matemática e Música". 84f.Monografia (Bacharelado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.