APLICAÇÃO DE MODELAGEM NO CRESCIMENTO POPULACIONAL BRASILEIRO

Adriano Luís Simonato (Faculdades Integradas FAFIBE)
Kenia Cristina Gallo (G- Faculdade de Ciências e Tecnologia de Birigüi/SP)

Resumo: Este trabalho trata da implementação de modelagem quanto ao crescimento da população do Brasil.

Palavras-chave: modelagem populacional; Modelo Malthusiano; crescimento populacional; IBGE.

1. Introdução: Primórdios da modelagem

O homem sempre desejou entender o seu planeta e o mundo em geral. A primeira necessidade da humanidade foi conquistar o domínio de seu meio ambiente. A segurança contra predadores e fenômenos naturais, a busca da alimentação e a organização social dos núcleos humanos despertaram os primeiros questionamentos dos homens, privilegiando a ação sobre o concreto. Na medida em que as necessidades do espírito humano foram se tornando mais complexas, cresceram as carências por aperfeiçoar o processo de compreensão do mundo. Na impossibilidade de lidar diretamente com complexidade do mundo, o homem tem se mostrado cada vez mais hábil na criação de metáforas para a representação e solução de sua relação com esse mundo.

Esse processo de busca de uma visão bem estruturada da realidade (esclarecimento) é fundamentalmente um fenômeno de modelagem que é tão antigo quanto à própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos.

Desde a antiguidade, a Matemática vem servindo como instrumento para interpretar o mundo. Como uma forma de interpretar tais fenômenos, os homens fazem uso da Matemática, constroem modelos, e trabalham a Matemática como uma das ferramentas na busca de soluções.

A busca dessas soluções para descrever tais fenômenos ou situações vai ao encontro da Modelagem Matemática, cujo objetivo é equacionar uma situação real e auxiliar na tomada de decisão através da utilização de ferramentas matemáticas.

2. Modelagem Populacional

A aplicação de modelagem no estudo das populações, qual aparentemente segue regras desordenadas, cujo foco é o estudo das populações humanas, onde verificamos as taxas de natalidade, mortalidade, imigração, emigração de um pais ou região, permitindo aos governantes determinarem os recursos necessários para o atendimento das necessidades básicas da população. A partir desses dados estatísticos e de uma modelagem adequada, é possível prever taxas de crescimento futuras das populações em análise e assim, caso necessário, atuar no dimensionamento de recursos para essas populações ou no controle efetivo da mesma, caso o crescimento seja indesejável.

Este artigo tem como objetivo mostrar a aplicação da modelagem no crescimento populacional brasileiro, para isto iremos considerar o Modelo de Malthus, adivindo de Thomas Malthus (1776-1834). Para isso, usaremos como ferramental matemático as equações diferenciais, em particular as de variáveis separáveis.

3. Thomas Malthus

Thomas Robert Malthus nasceu entre 14 e 17 de fevereiro de 1776, em The rookery, no Condado de Surrey, na Inglaterra. Em 1788 formou em Matemática e em 1797 ordenou-se sacerdote da Igreja Anglicana. Em 1805 passa a lecionar economia política e história em Haileybury e vive como um modesto vigário rural.

Malthus, figura central em estudos na história da população, em 1978, publicou anonimamente seu Essay on Populantion (Ensaio sobre a população), no qual afirma que a população cresce em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos aumenta em progressão aritmética. A solução para evitar epidemias, guerras e outras catástrofes provocadas pelo excesso de população, consistiriam, segundo ele, na restrição dos programas assistenciais públicos de caráter caritativo e na abstinência sexual dos membros das camadas menos favorecidas da sociedade.

Suas idéias eram de que o nível de condições de sobrevivência estava decaindo devido a basicamente três elementos: - Elevada produção de Jovens (Crescimento vegetativo alto) – Inabilidade Produtiva de Recursos (recursos escassos) – Irresponsabilidade das Classes mais baixas.

Foi eleito membro da Royal Society em 1819, nos anos seguintes recebeu grande número de homenagem e honras acadêmicas. Malthus morreu em Saint Catherine, em 23 de dezembro de 1834.

Suas principais obras são: Principles of Political Economy, 1820; The Measure of Value Stated and Illustrated, 1823, "Tooke -- On High and Low Prices", 1823; "Quaterly Rev "Political Economy", 1824; Quarterly Rev A Summary View of the Principle of Population, 1830 e Definitions in Political economy, 1827.

4. Modelo Malthusiano

Uma maneira comum de modelar uma população, contudo, é por meio de uma função derivável P que aumenta a uma taxa proporcional ao tamanho da população.

Um modelo desse tipo de crescimento populacional é o modelo Malthusiano, advindo de Thomas Malthus (1776-1834)

Seu "modelo" é baseado em dois postulados:

1. "O alimento é necessário à subsistência do homem";
2. "A paixão entre os sexos é necessária e devera permanecer aproximadamente em seu estado permanente".

Supondo, então, que tais postulados estejam garantidos, Malthus afirma que "a capacidade de reprodução do homem é superior a capacidade da terra produzir meios para a sua subsistência e, a inibição do crescimento populacional é devida à disponibilidade de alimentos.

O modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizado, sem guerra, fome, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento.

A idéia de Malthus é a de que a taxa na qual uma população cresce é proporcional ao seu tamanho, e isso na linguagem das equações diferencias quer dizer:

$$\frac{dP}{dT} = kP \text{ (eq.2)}$$

onde k é a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

Logo T representa o tempo decorrido desde o início do experimento, e P representa o tamanho da população no tempo T, isto é, P é variável dependente e T é a independente.

Se k>0, a população apresenta-se crescente, se k<0 a população decai de acordo com o tempo, porém se k=0, ou seja, se a taxa de natalidade for exatamente igual a taxa de mortalidade a população permanecerá constante no tempo.

Este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento de nossa população está sujeito apenas às taxas de natalidade e de mortalidade, se não ocorre migração, e se podemos considerar a diferença entre as taxas de natalidade e de mortalidade constante, teremos que o valor de k é uma constante e assim podemos modelar a população de acordo com o tempo pela fórmula:

$$P(T) = P_0.e^{kT} \text{ (eq.3)}$$

Para chegarmos a esta solução específica, usamos uma condição inicial, como um valor conhecido do início do experimento. Então, quando T=0 a população é P_0. Assim, nossa condição inicial é $P(0) = P_0$. Colocando isso junto com a equação diferencial original, obtemos um problema de valor inicial para o modelo de Malthus.

A equação diferencial é resolvida por uma separação de variáveis:

$$\frac{dP}{P} = kdT$$

A condição inicial é substituída neste resultado na integração da equação diferencial:

$$\int_{P_0}^{P(T)} \frac{dP}{P} = k\int_0^T dT$$

Obtendo-se assim $\ln\frac{P(T)}{P_0} = kT$ o que implica em $P(T) = P_0.e^{kT}$ (eq.4)

Temos uma constante k que só pode ser solucionada se puder obter algum dado da população por algum tempo posterior, conforme vimos, consideramos que k representa uma diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade da população em estudo, sendo k considerada um valor constante com o tempo na resolução deste problema.

Devemos notar que a função $P(T)$ que obtemos é uma aproximação contínua da população, a qual aumenta por números inteiros.

O modelo Malthusiano, devido à curva exponencial de $P(T)$, pode ser denominado como modelo de crescimento exponencial ou de forma J, onde a letra J representa justamente o formato da curva exponencial.

Conforme vimos o crescimento de forma J é expresso basicamente por:

$$P(T) = P_0.e^{kT}$$

Onde k representa uma constante de crescimento da população, a qual assumiu inicialmente ser dependente apenas de taxas constantes de natalidade e mortalidade.

5. Cálculo da taxa de crescimento populacional

Vamos admitir que as taxas de fertilidade n e de mortalidade m sejam constantes. Essas hipóteses são realísticas em uma população grande que varia em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes (a população tem recursos ilimitados e não interage com competidores ou predadores).

Temos que $k = n - m$ (coeficiente de natalidade menos o de mortalidade) é a taxa de crescimento específico da população $P(t)$,aqui considerada constante. Assim,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = k \text{ . (eq.5)}$$

A eq.5 representa a variação relativa da população que é constante, ou seja, que a variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo de Malthus é dado por: $P(t+1) - P(t) = kP(t)$. (eq.6)

Considerando dada população inicial $P(0) = P_0$, a solução de (eq.5) é obtida por recorrência da expressão:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1+k)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases} \text{ , ou seja, } P_t = (k+1)^t P_0 \text{ (eq.7)}$$

Assim dados dois sensos P_0 e P_t, a taxa de crescimento demográfico em t anos é obtida de (eq.7), fazendo:

$$(k+1)^t = \frac{P_t}{P_0} \Rightarrow k = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \text{ (eq.8)}$$

Lembrando que a (eq.3) pode ser escrita na forma exponencial, observe:

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+k)t} \text{ . (eq.9)}$$

6. Aplicação do Modelo Malthusiano aos dados do IBGE

Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2000

Períodos	População	Taxas de Crescimento (% a.a)
1940	41.236.315	2,39
1950	51.944.397	2,99
1960	70.070.457	2,89
1970	93.139.037	2,48
1980	119.002.706	1,93
1991	146.825.475	1,64
1996	157.079.573	1,64
2000	169.799.170	1,64

Tabela.1

Com base nos dados da tabela 1, dados dois censos, 1940 é $P_0 = 41.236.415$, e dez anos depois, $P_{10} = 51.944.397$, a taxa de crescimento populacional média (relativa), entre 1940 e 1950 é dada por:

$$\alpha = \sqrt[10]{\frac{51944397}{41236315}} - 1 = 1{,}0233539 - 1 = 0{,}0233539 \approx 2{,}3\% \text{ ao ano.}$$

Se considerarmos as populações entre os censos de 1940 e 1991, α é dada por:

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146825475}{41236315}} - 1 = 0{,}0252131$$

o que permite afirmar que a população brasileira cresceu a uma taxa media de, aproximadamente, 2,5% ao ano nestes 51 anos.

A tabela abaixo fornece os censos demográficos do IBGE e as taxas de crescimento calculadas de período em período, segundo (eq.8) do modelo Malthusiano.

Períodos	População	Taxas de Crescimento (% a.a)
1940	41.236.315	1,50
1950	51.944.397	2,30
1960	70.070.457	3,20
1970	93.139.037	2,80
1980	119.002.706	2,50
1991	146.825.475	1,90
1996	157.079.573	1,36
2000	169.799.170	1,97

Tabela 2

A tabela abaixo fornece a estimativa do IBGE para a população projetada com a taxa de crescimento calculadas de período em período segundo Modelo Malthusiano

Períodos	População	Taxas de Crescimento (% a.a)
2004	181.581.024	1,70
2010	191.007.625	0,85
2015	201.387.136	1,06
2020	210.764.732	0,91
2050	259.800.000	0,70

Tabela 3

Segundo dados do IBGE a população projetada no ano de 2062 terá sua taxa de crescimento zerada.

Podemos concluir que a preocupação de Malthus não era em vão, pois a população está crescendo e pode futuramente ser uma preocupação mundial.

7. Referências Bibliográficas

http://allan.cefetba.br/populacao/modelagem.html
http://economiabr.net/biografia/malthus.html
http://biomania.com.br/biografias/thomasmalthus.php
Bassanezi, Ridney Carlos. Modelagem Matemática uma nova estratégia. SP: Contexto, 2001.
http://www.ibge.gov.br